Correction du devoir surveillé $n°5$

Problème I : étude d'une suite définie par récurrence

On considère la fonction $f : x \mapsto \dfrac{\ln(1+x)}{x}$.

1. (a) $D =]-1;+\infty[\backslash\{0\}$.

   (b) Par quotient dont le dénominateur ne s'annule pas, f est continue sur D. De plus, $f(x) \underset{x\to 0}{\sim} 1$, d'où $f(x) \xrightarrow[x\to 0]{} 1$ et prolongeable par continuité en 0 en posant $f(0) = 1$.
   On notera par la suite encore f ce prolongement sur $D \cup \{0\}$.

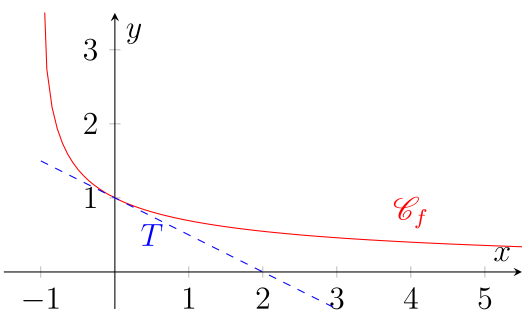
   (c) Par quotient dont le dénominateur ne s'annule pas, f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur D et pour tout $x \in D$,
   $$f'(x) = \frac{\frac{x}{1+x} - \ln(1+x)}{x^2} = \frac{x - (1+x)\ln(1+x)}{x^2(1+x)}$$

   (d) On a $x - (1+x)\ln(1+x) \underset{x\to 0}{=} x - (x - \frac{x^2}{2} + x^2 + o(x^2)) \underset{x\to 0}{=} -\frac{1}{2}x^2 + o(x^2)$.
   Donc $f'(x) \underset{x\to 0}{\sim} \frac{-\frac{1}{2}x^2}{x^2} \underset{x\to 0}{\sim} -\frac{1}{2}$. Donc $f'(x) \xrightarrow[x\to 0]{} -\frac{1}{2}$. D'après le théorème de la limite de la dérivée, f est dérivable en 0 et $f'(0) = -\frac{1}{2}$.
   On montre au passage que f est de classe $\mathscr{C}^1$ en 0 car $f'(x) \xrightarrow[x\to 0]{} f'(0)$.

2. (a) Notons $h : x \mapsto \frac{x}{1+x} - \ln(1+x)$. Par combinaison linéaire, h est dérivable sur $]-1,+\infty[$ et pour tout $x \in]-1,+\infty[$,
   $$h'(x) = \frac{1+x-x}{(1+x)^2} - \frac{1}{1+x} = \frac{-x}{(1+x)^2}$$
   Donc h est strictement croissante sur $]-1;0]$ et strictement décroissante sur $[0;+\infty[$. De plus, $h(0) = 0$, d'où h est négative sur $]-1,+\infty[$ et s'annule uniquement en 0.
   Or f' est du signe de h sur D et $f'(0) < 0$ donc f est strictement décroissante sur $]-1,+\infty[$.

   (b) On a $\lim\limits_{x\to -1} f(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = 0$ par croissance comparée.

   (c) On note $\mathscr{C}_f$ la courbe représentative de f et T la tangente à $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse 0.
   On a $f(x) \underset{x\to 0}{=} 1 - \frac{x}{2} + \frac{x^2}{3} + o(x^2))$. D'où T admet pour équation $y = 1 - \frac{x}{2}$.
   De plus, $f(x) - (1 - \frac{x}{2}) \underset{x\to 0}{\sim} \frac{x^2}{3}$. On en déduit que $\mathscr{C}_f$ est au dessus T au voisinage de 0.

   (d)
   

3. On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :
   $$\begin{cases} u_0 \in \mathbb{R}_+ \\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = f(u_n). \end{cases}$$

   (a) D'après les variations de f, $f(\mathbb{R}_+) =]0,1] \subset \mathbb{R}_+$.
   Donc $\mathbb{R}_+$ est stable par f et contient u_0 donc la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bien définie.

(b) Notons $g : x \mapsto f(x) - x$, g est continue et strictement décroissante par somme. De plus, $g(0) = 1 > 0$ et $g(1) = \frac{\ln(2)}{2} - 1 < 0$. D'après le théorème des valeurs intermédiaires (version fonction strictement monotone), $\exists! \alpha \in]0,1[$ tel que $g(\alpha) = 0$ i.e. $f(\alpha) = 0$.

(c) La fonction f est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}_+^*$ et pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$,

$$f''(x) = \frac{h'(x)x^2 - 2xh(x)}{x^4} = \frac{\frac{-x^3}{(1+x^2)} - \frac{-2x^2}{1+x} + 2x\ln(1+x)}{x^4} = \frac{\frac{x^3+2x^2}{(1+x^2)} + 2x\ln(1+x)}{x^4} > 0.$$

On en déduit que f' est croissante sur $\mathbb{R}_+$. De plus, $f'(0) = -\frac{1}{2}$ et $f'(x) \underset{x\to+\infty}{=} o\left(\frac{1}{x}\right)$ d'où $\lim\limits_{x\to+\infty} f'(x) = 0$. On en déduit que $\forall x \in \mathbb{R}_+,\ |f'(x)| \leqslant \frac{1}{2}$.

(d) D'après l'inégalité des accroissements finis, $\forall n \in \mathbb{N},\ |f(u_n) - f(\alpha)| = |u_{n+1} - \alpha| \leqslant \frac{1}{2}|u_n - \alpha|$. On a donc $\forall n \in \mathbb{N},\ |u_n - \alpha| \leqslant \frac{1}{2^n}|u_0 - \alpha|$. par conséquent, la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers α.

(e) On choisit $u_0 = 1$. Soit $N \in \mathbb{N}$. $\frac{1}{2^N} \leqslant 10^{-30} \iff N \geqslant \frac{30\ln(10)}{\ln(2)}$.
Conclusion : pour $N = \frac{30\ln(10)}{\ln(2)}$, on a $\forall n \geqslant N,\ |u_n - \alpha| \leqslant |u_N - \alpha| \leqslant \frac{1}{2^N}|u_0 - \alpha| \leqslant \frac{1}{2^N} \leqslant 10^{-30}$.

Problème II : Liberté de trois fonctions exponentielles

On considère trois fonctions : $f : x \mapsto \mathbf{e}^x$, $g : x \mapsto \mathbf{e}^{2x}$ et $h : x \mapsto \mathbf{e}^{x^2}$ de l'espace vectoriel $\mathscr{C}^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R})$.
Soit $a, b, c \in \mathbb{R}$ tels que $af + bg + ch = 0_{\mathscr{C}^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R})}$. On notera φ la fonction $af + bg + ch$.

1. On évalue φ en 0, 1 et 2 : $\begin{cases} a+b+c=0 \\ a\mathbf{e} + b\mathbf{e}^2 + c\mathbf{e}^2 = 0 \\ a\mathbf{e}^2 + b\mathbf{e}^4 + c\mathbf{e}^4 = 0 \end{cases}$ d'où $\begin{cases} a+b+c=0 \\ a + b\mathbf{e} + c = 0 \\ a + b\mathbf{e}^2 + c\mathbf{e}^2 = 0 \end{cases}$.
   L'opération $L_2 - \mathbf{e}L_1$ donne $(\mathbf{e}-1)b = 0$ donc $b = 0$ puis on a $a = -c$ d'où $(\mathbf{e}^2 - 1)c = 0$ ce qui donne $c = a = 0$. La famille (f, g, h) est libre.
2. On a $\varphi(x) \underset{x\to0}{=} (a+b+c) + (a+2b)x + \left(\frac{a}{2} + 2b + c\right)x^2 + o(x^2)$.
   Par unicité du développement limité $\begin{cases} a+b+c=0 \\ a+2b=0 \\ \frac{a}{2}+2b+c=0 \end{cases}$ L'opération $L_3 - L_1$ donne $-\frac{a}{2} + b = 0$. En utilisant L_2, on trouve $b = 0$, d'où $a = 0$ et $c = 0$. La famille (f, g, h) est libre.
3. Si $c \neq 0$, $\varphi(x) \underset{x\to-\infty}{\longrightarrow} \pm\infty$ ce qui est absurde avec $\varphi = 0$ et l'unicité de la limite.
   Donc $c = 0$. On a donc $\frac{\varphi}{f} : x \mapsto a + b\mathbf{e}^x$, d'où $\frac{\varphi}{f}(x) \underset{x\to-\infty}{\longrightarrow} a$. Par unicité de la limite $a = 0$. Finalement, comme $g \neq 0_{\mathscr{C}^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R})}$, on a $b = 0$. La famille (f, g, h) est libre.
4. On a $f \underset{+\infty}{=} o(g)$ et $g \underset{+\infty}{=} o(h)$ en $+\infty$. D'où $\varphi \underset{+\infty}{=} ch + o(h)$. Par l'absurde, si $c \neq 0$, $\varphi \underset{+\infty}{\sim} ch \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} \pm\infty$.
   Or $\varphi = 0_{\mathscr{C}^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R})}$, on arrive donc à une absurdité, d'où $c = 0$.
   Ensuite, $\varphi \underset{+\infty}{=} bg + o(g)$. Par l'absurde, si $b \neq 0$, $\varphi \underset{+\infty}{\sim} bg \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} \pm\infty$. Or $\varphi = 0_{\mathscr{C}^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R})}$, on arrive donc à une absurdité, d'où $b = 0$ puis $a = 0$. La famille (f, g, h) est libre.
5. *Généralisation :* Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soit $(P_k)_{k\in[\![1,n]\!]}$ une famille d'éléments de $\mathbb{K}[X]$ vérifiant :
   $$\forall k \in [\![1, n[\![, P_{k+1}(x) - P_k(x) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$$
   Pour tout $k \in [\![1,n]\!]$, on note $f_k : x \mapsto \mathbf{e}^{P_k(x)}$. D'où : $\forall k \in [\![1, n[\![, \frac{f_k}{f_{k+1}}(x) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ i.e. $f_k \underset{+\infty}{=} o(f_{k+1})$.
   Montrons par récurrence sur $n \in \mathbb{N}^*$ que la famille $(f_k)_{k\in[\![1,n]\!]}$ est libre.
   Initialisation : f_1 est non nulle donc (f_1) est libre.
   Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soit $(\lambda_k)_{k\in[\![1,n+1]\!]}$ tel que $\displaystyle\sum_{k=1}^{n+1} \lambda_k f_k = 0_{\mathscr{C}^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R})}$.
   On a $\displaystyle\sum_{k=1}^{n+1} \lambda_k f_k \underset{+\infty}{=} \lambda_{n+1} f_{n+1} + o(f_{n+1})$. Donc $0 \underset{+\infty}{\sim} \lambda_{n+1} f_{n+1}$. D'où $\lambda_{n+1} = 0$, puis par hypothèse de récurrence, $\lambda_k = 0$ pour tout $k \in [\![1, n+1]\!]$.
   Conclusion : La famille $(f_k)_{k\in[\![1,n]\!]}$ est libre.