#### Correction du devoir surveillé $n^{\circ}5$

# Partie I : valeur exacte de $\cos(\frac{2\pi}{5})$

1. P(1) = 0 donc X - 1 divise le polynôme P.

/1

2. En effectuant la division euclidienne de P par X-1, on obtient  $P=(X-1)(X^4+X^3+X^2+X+1)$ . On note  $Q=X^4+X^3+X^2+X+1$ .

/1

3.  $\mathbb{U}_5 = \{1, \mathbf{e}^{\frac{2i\pi}{5}}, \mathbf{e}^{\frac{4i\pi}{5}}, \mathbf{e}^{\frac{6i\pi}{5}}, \mathbf{e}^{\frac{8i\pi}{5}}\}$ . D'où  $P = (X-1)(X-\mathbf{e}^{\frac{2i\pi}{5}})(X-\mathbf{e}^{\frac{4i\pi}{5}})(X-\mathbf{e}^{\frac{6i\pi}{5}})(X-\mathbf{e}^{\frac{8i\pi}{5}})$ . Par conséquent,  $P = (X-1)(X^2 - 2\cos(\frac{2\pi}{5})X + 1)(X^2 - 2\cos(\frac{4\pi}{5})X + 1)$ .

/1

4. Par conséquent,  $Q = (X^2 - 2\alpha X + 1)(X^2 - 2\beta X + 1)$ .

/1

5. En développant, on obtient  $Q = X^4 - 2(\alpha + \beta)X^3 + 2(1 + 2\alpha\beta)X^2 - 2(\alpha + \beta)X + 1$ . Par identification des coefficients :  $\alpha + \beta = -\frac{1}{2}$  et  $\alpha\beta = -\frac{1}{4}$ .

/1

6. Donc  $\alpha$  et  $\beta$  sont solutions de l'équation (E):  $x^2 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{4} = 0$ . Cette équation admet pour discriminant  $\Delta = \frac{5}{4}$  et donc ses solutions sont  $\frac{-1+\sqrt{5}}{4}$  et  $\frac{-1-\sqrt{5}}{4}$ . Le réel  $\alpha$  étant positif,  $\alpha = \frac{-1+\sqrt{5}}{4}$ .

## Partie II : une équation dans $\mathbb{R}[X]$

#### Analyse:

On suppose que l'équation (E) admet une solution non nulle que l'on note P.

1. On note d le degré de P et  $P=\sum_{k=0}^{d}a_kX^k$  où  $(a_k)_{k\in \llbracket 0,d\rrbracket}\in \mathbb{R}^{d+1}$  avec  $a_d\neq 0$ .

Le coefficient dominant de (X-1)P' est  $da_d$  et celui de nP est  $na_d$ .

Or (X-1)P'=nP, donc  $da_d=na_d$ . De plus  $a_d\neq 0$  donc d=n i.e.  $\deg(P)=n$ .

/1

2. (a) En évaluant en 1 l'égalité (X-1)P'=nP, on trouve P(1)=0. Donc 1 est une racine de P.

/1

(b) Montrons par récurrence que pour tout  $k \in \mathbb{N}$ ,  $(X-1)P^{(k+1)} = (n-k)P^{(k)}$ . Comme P vérifie (X-1)P' = nP, la propriété est vraie pour k=0. Soit  $k \in \mathbb{N}$ , supposons que  $(X-1)P^{(k+1)} = (n-k)P^{(k)}$ . En dérivant, on trouve :

$$(X-1)P^{(k+2)} + P^{(k+1)} = (n-k)P^{(k+1)}$$
 i.e.  $(X-1)P^{(k+2)} = (n-(k+1))P^{(k+1)}$ 

La récurrence est établie. Conclusion :  $\forall k \in \mathbb{N}, (X-1)P^{(k+1)} = (n-k)P^{(k)}$ .

/1

- (c) D'après la question précédente, pour tout  $k \in \mathbb{N}$ ,  $(n-k)P^{(k)}(1) = 0$ . Donc, pour tout  $k \in [0, n-1]$ ,  $P^{(k)}(1) = 0$ . De plus,  $P^{(n)}(1) = n!a_n \neq 0$ . Conclusion : 1 est racine de P de multiplicité n.
  - \_\_\_\_\_\_
- 3. P est un polynôme de degré n et on a trouvé n racines comptées avec multiplicité, d'où P est scindé. Plus précisément, il existe  $\lambda \in \mathbb{R}^*$  tel que  $P = \lambda (X 1)^n$ .

/1

Synthèse et conclusion :

4. Pour  $P = \lambda (X - 1)^n$  avec  $\lambda \in \mathbb{R}^*$ , on a  $(X - 1)P' = n\lambda (X - 1)^n = nP$ . Conclusion l'ensemble des solutions du problème est  $\{\lambda (X - 1)^n, \lambda \in \mathbb{R}\}$ .

/1

### Partie III: étude du point fixe du sinus cardinal

1.  $f(x) = 0 \iff x \neq 0 \text{ et } \sin(x) = 0 \iff x \in \{k\pi, k \in \mathbb{Z}^*\}.$ 

Donc la courbe  $\mathscr{C}_f$  coupe l'axe des abscisses aux points d'abscisses  $\{k\pi, k \in \mathbb{Z}^*\}$ .

/1

2. Soit  $x \neq 0$ ,  $f(-x) = \frac{\sin(-x)}{-x} = \frac{\sin(x)}{x} = f(x)$  et f(-0) = f(0). Donc la fonction f est paire.

Par ailleurs,  $|\sin(x)| \le 1$ , d'où  $\lim_{x \to +\infty} \frac{\sin(x)}{x} = 0$ . De même,  $\lim_{x \to -\infty} \frac{\sin(x)}{x} = 0$ .

/1

3.	On a déjà que $f$ est continue sur $\mathbb{R}^*$ car $f$ est le quotient de deux fonctions continues sur $\mathbb{R}^*$ avec celle si	ituée au
	dénominateur ne s'annulant pas. De plus, $\sin(x) \sim x$ , d'où $\frac{\sin(x)}{x} \sim 1$ . D'où $\lim_{x\to 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1 = f(0)$ dor	nc f est
	continue en 0 et par conséquent sur $\mathbb{R}$ .	/1
4.	La fonction $f$ est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ car $f$ est le quotient de deux fonctions dérivables sur $\mathbb{R}^*$ avec celle si	ituée au
	numérateur ne s'annulant pas. De plus, pour tout $x \in \mathbb{R}^*$ , $f'(x) = \frac{x \cos(x) - \sin(x)}{x^2} = \frac{g(x)}{x^2}$ .	/1
5.	On a $g(x) = x \left(1 - \frac{x^2}{2} + o(x^2)\right) - \left(x - \frac{x^3}{3!} + o(x^3)\right) = -\frac{x^3}{3} + o(x^3)$ . Ainsi $g(x) \approx -\frac{x^3}{3}$ .	/1

6. Ainsi 
$$f'(x) \sim \frac{-\frac{x^3}{3}}{x^2} \sim -\frac{x}{3}$$
. D'où  $f'(x) \to 0$ . Par conséquent,  $f$  est continue sur  $\mathbb{R}$ , et  $f'(x) \to 0$ . D'après le théorème de la limite de la dérivée,  $f$  est dérivable en  $0$  et  $f'(0) = 0$ .

Pour tout  $k \in \mathbb{N}$ , on note  $I_k$  l'intervalle  $[k\pi, (k+1)\pi]$ .

- 7. La fonction g est continue et dérivable sur  $I_0$ . Pour tout  $x \in I_0$ ,  $g'(x) = -x\sin(x) \le 0$ . De plus, il y a égalité uniquement pour x = 0 ou  $x = \pi$ . L'ensemble des points dans  $I_0$  où la fonction g' s'annule est un ensemble fini, donc g est strictement décroissante sur  $I_0$ . Donc pour tout  $x \in I_0 \setminus \{0\}$ , g(x) < g(0) = 0. On en déduit que f' < 0 sur  $[0,\pi]$  et f'(0) = 0. L'ensemble des points de  $I_0$  où la fonction f' s'annule est un ensemble fini, donc f est strictement décroissante sur  $I_0$ .
- 8. Soit  $k \in \mathbb{N}^*$ .
  - (a) f est continue sur  $[k\pi, (k+1)\pi]$ , dérivable sur  $]k\pi, (k+1)\pi[$  et  $f(k\pi) = f((k+1)\pi) = 0$ . D'après le théorème de Rolle, il existe un réel  $\alpha_k \in ]k\pi, (k+1)\pi[$  tel que  $f'(\alpha_k) = 0$ .
  - (b) Supposons par l'absurde qu'il existe un réel  $\beta_k \in ]k\pi, (k+1)\pi[$  tel que  $f'(\beta_k) = 0$ . La fonction g est continue et dérivable sur  $I_k$ . On a  $g(\beta_k) = \beta_k^2 f'(\beta_k) = 0$  et  $g(\alpha_k) = \alpha_k^2 f'(\alpha_k) = 0$ . D'après le théorème de Rolle, il existe  $\gamma_k$  entre  $\alpha_k$  et  $\beta_k$  tel que  $g'(\gamma_k) = 0$  ce qui est impossible. En effet, pour tout  $x \in ]k\pi, (k+1)\pi[, g'(x) = -x\sin(x) \neq 0$ . Conclusion: il existe un unique réel  $\alpha_k \in ]k\pi, (k+1)\pi[$  tel que  $f'(\alpha_k) = 0$ .
  - (c) On a  $f'(k\pi) = \frac{(-1)^k}{k\pi}$  et  $\exists ! \alpha_k \in ]k\pi, (k+1)\pi[$  tel que  $f'(\alpha_k) = 0$ . Comme f' est continue sur  $I_k$ :

     si k est pair alors f' est strictement positive sur  $[k\pi, \alpha_k[$  et f' est strictement négative sur  $]\alpha_k, (k+1)\pi[$ . Donc f est strictement croissante sur  $[k\pi, \alpha_k]$  et f est strictement décroissante sur  $[\alpha_k, (k+1)\pi]$ .

     si k est impair alors f' est strictement négative sur  $[k\pi, \alpha_k[$  et f' est strictement positive sur  $]\alpha_k, (k+1)\pi[$ . Donc f est strictement décroissante sur  $[k\pi, \alpha_k]$  et f est strictement croissante sur  $[\alpha_k, (k+1)\pi]$ .
- 9. (a) Considérons  $h: x \mapsto \frac{x^2}{2} g(x)$ . Donc h est de classe  $\mathscr{C}^1$  sur  $\mathbb{R}$  et  $h'(x) = x + x \sin(x) = x(1 + \sin(x))$  pour tout  $x \in \mathbb{R}$ . On en déduit que  $h' \leqslant 0$  sur  $\mathbb{R}_-$  et  $h' \geqslant 0$  sur  $\mathbb{R}_+$ . Donc h est décroissante sur  $\mathbb{R}_-$  et croissante sur  $\mathbb{R}_+$ . Ainsi, h admet un minimum en 0 qui vaut h(0) = 0. Conclusion : h est positive d'où  $\forall x \in \mathbb{R}, g(x) \leqslant \frac{x^2}{2}$ .

On admet qu'on a aussi l'inégalité  $g(x) \geqslant -\frac{x^2}{2}$  pour tout  $x \in \mathbb{R}$ .

- (b) On a  $f'(x) = \frac{g(x)}{x^2}$  pour tout  $x \in \mathbb{R}^*$ . D'après la question précédente, on a, pour tout  $x \in \mathbb{R}^* : -\frac{1}{2} \leqslant f'(x) \leqslant \frac{1}{2}$ .

  Par ailleurs f'(0) = 0, donc  $\forall x \in \mathbb{R}$ ,  $|f'(x)| \leqslant \frac{1}{2}$ .
- 10. Supposons qu'il existe  $c \in \mathbb{R}$  un point fixe de f, f(c) = c, donc  $c \neq 0$  et  $c \neq 1$  (car f(0) = 1 et  $f(1) = \sin(1) \neq 1$ ). On a  $\sin(c) = c^2$ , donc  $-1 \leqslant c \leqslant 1$ . De plus, la fonction sinus est négative sur [-1,0[. On en déduit que s'il existe un point fixe c de f alors  $c \in ]0,1[$ . Considérons  $s: x \mapsto f(x) x$ . Les points fixes de f sont les zéros de f. La fonction f est continue sur f et f
- 11. On considère la suite  $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$  de premier terme  $u_0=0$  et telle que  $u_{n+1}=f(u_n)$  pour tout  $n\in\mathbb{N}$ .
  - (a) On a montré dans la question 7. que f est strictement décroissante sur  $I_0$  et donc sur [0,1]. On en déduit que si  $x \in [0,1]$  alors  $0 < f(1) \le f(x) \le f(0) = 1$ . Donc [0,1] est stable par f.

Comme  $u_0 = 0 \in [0, 1]$ , on a que  $u_n \in [0, 1]$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$ .

/1

- (b) La fonction f est continue sur [0,1], dérivable sur ]0,1[ et pour tout  $x \in ]0,1[$ ,  $|f'(x)| \leq \frac{1}{2}$ . /1D'après l'inégalité des accroissement finis, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $|f(u_n) - f(c)| \leq \frac{1}{2}|u_n - c|$  i.e.  $|u_{n+1} - c| \leq \frac{1}{2}|u_n - c|$ .
- (c) D'où, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $|u_n c| \leqslant \frac{1}{2^n} |u_0 c|$ , et donc  $\lim_{n \to +\infty} |u_n c| = 0$  i.e.  $u_n \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} c$ .
- (d) Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $|u_n c| \leqslant \frac{c}{2^n} \leqslant \frac{1}{2^n}$ . On choisit donc n tel que  $\frac{1}{2^n} \leqslant 10^{-3}$  i.e.  $n \geqslant \log_2(10^3)$ .
- (e) La fonction f est décroissante sur [0,1] donc  $f \circ f$  est croissante sur [0,1]. On en déduit que  $(u_{2n})_{n \in \mathbb{N}}$  et  $(u_{2n+1})_{n \in \mathbb{N}}$  sont monotones et de sens de monotonie inverse. Or  $u_2 \geqslant u_0 = 0$ , donc  $(u_{2n})_{n \in \mathbb{N}}$  est croissante et  $(u_{2n+1})_{n \in \mathbb{N}}$  est décroissante. La suite  $(u_n)$  converge vers c, donc les sous-suites  $(u_{2n})$  et  $(u_{2n+1})$  converge également vers c. On en déduit alors que les suites  $(u_{2n})_{n \in \mathbb{N}}$  et  $(u_{2n+1})_{n \in \mathbb{N}}$  sont adjacentes.

Donc, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $u_0 \leqslant u_{2n} \leqslant c \leqslant u_{2n+1} \leqslant u_1$ . On a donc  $|u_n - c| \leqslant |u_n - u_{n+1}|$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$ .

Conclusion:  $\forall \varepsilon > 0, \ \forall n \in \mathbb{N}, \ |u_n - u_{n+1}| \leqslant \varepsilon \implies |u_n - c| \leqslant \varepsilon.$ 

/2

```
(f) import math
  def f(x):
    if x==0:
        return 1
    else:
        return math.sin(x)/x

def erreur(e):
    u=0
    v=f(0)
    while abs(u-v)>e:
        u=v
        v=f(v)
    return u
```

/2